第4講　2次関数(2)

1 [1]　2次不等式 $x^2+x-2 \leqq 0$ の解を求めよ．また，2次不等式 $x^2+x-2 \leqq |x|$ の解を求めよ．

[2]　a を実数とする．2次不等式 $x^2-ax+(a-1) \leqq 0$ ……① について次の問いに答えよ．

(1)　不等式①を解け．

(2)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2次不等式を解く

・まずは2次関数と x 軸との共有点（交点）を求める．

2次方程式と同じく，まずは2次式を「　　　　　　」，だめなら解の公式.

・$f(x)>0$　は　$f(x)$ が「x 軸」より「　　」にある部分

$f(x)<0$　は　$f(x)$ が「x 軸」より「　　」にある部分

$f(x)>g(x)$ は　$f(x)-g(x)>0$　　または　$f(x)$ が $g(x)$ より上にある部分

[2]　文字定数を含む2次不等式

共有点の x 座標に「　　　」が入る場合は，その「　　　　　　」に注意.

また，必要に応じて範囲を拡大・縮小して考える．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2 次不等式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x に対して成り立つような定数 a の範囲を求めよ.

［2］ 不等式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

【Point Pickup】

[1]　絶対不等式（基本）

「絶対不等式」とは？ ⇒ ある範囲における「　　　　x」（任意の x）で成立する不等式

ある不等式を絶対不等式にするには,「　　　・　　　」を用いるとよい.

ある範囲で $f(x)\geqq 0$ が成立 ⇒ その範囲における $f(x)$ の「　　　　」が 0 以上

ある範囲で $f(x)\leqq 0$ が成立 ⇒ その範囲における $f(x)$ の「　　　　」が 0 以下

ただし, 2 次不等式の場合は「$D<0$」も時には有効.

[2]　最高次数の係数が文字

その文字の「　　　」により, グラフの凸方向が決定.

また「　」になると次数が下がるので注意.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2次方程式 $x^2+2ax+4a+12=0$ ……① について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) 方程式①が重解をもつとき，a の値とその重解を求めよ．

(2) 方程式①が異なる2つの負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(3) 方程式①が負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「解の存在範囲（解の配置）」

$ax^2+bx+c=f(x)$ とおき，グラフと x 軸の「　　　　　」が範囲内に収まるようにする．

重要　(i)「　　　　」の y 座標の±

(ii)「　　」が範囲内

(iii)「　　　　　　$>0(\geqq 0)$」　または　「頂点の y 座標 $<0(\leqq 0)$」

※範囲が「開区間」の場合，その「端点を通る場合」を忘れやすいので注意！

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　2次関数(2)

(1)　a を正の整数とする．x の2次不等式 $x^2-6x-a^2-2a+8 \leqq 0$ を満たす整数が33個あるとき，$a=$ アイ である．

(2)　すべての実数 x に対して $ax^2+(a+1)x+a<0$ が成り立つような定数 a の値の範囲は $a<-\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である．

(3)　2次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$　……① が1より大きい異なる2つの実数解をもつような定数 k の値の範囲は オ $<k<$ カ である．また①が $x=1$ を解にもつとき，もう1解は $x=$ キ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(2)

1 [1]　2 次不等式 $x^2+x-2 \leqq 0$ の解を求めよ．また，2 次不等式 $x^2+x-2 \leqq |x|$ の解を求めよ．

$x^2+x-2 \leqq 0$　より　$(x+2)(x-1) \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 1}$

$x^2+x-2 \leqq |x|$　に関して

$x \geqq 0$ のとき　$x^2+x-2 \leqq x$　$x^2-2 \leqq 0$　$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$x \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$x<0$ のとき　$x^2+x-2 \leqq -x$　$x^2+2x-2 \leqq 0$　$-1-\sqrt{3} \leqq x \leqq -1+\sqrt{3}$

$x<0$ より　$-1-\sqrt{3} \leqq x<0$

以上より　$\boldsymbol{-1-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

1 [2]　a を実数とする．2 次不等式 $x^2-ax+(a-1) \leqq 0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　不等式①を解け．

(2)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど 3 個であるような a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2-ax+(a-1) \leqq 0$　……①　より　$(x+1-a)(x-1) \leqq 0$

$x^2-ax+a-1=0$ の解は　$x=a-1,\ 1$

よって不等式①の解は

$a-1<1$　つまり　$\boldsymbol{a<2}$ **のとき**　$\boldsymbol{a-1 \leqq x \leqq 1}$

$a-1=1$　つまり　$\boldsymbol{a=2}$ **のとき**　$\boldsymbol{x=1}$

$a-1>1$　つまり　$\boldsymbol{2<a}$ **のとき**　$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq a-1}$

(2)　①を満たす整数 x の個数がちょうど 3 個であるのは

$a<2$ のとき　$-2<a-1 \leqq -1$　つまり　$-1<a \leqq 0$

$a>2$ のとき　$3 \leqq a-1<4$　つまり　$4 \leqq a<5$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1<a \leqq 0,\ 4 \leqq a<5}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2 次不等式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x に対して成り立つような定数 a の範囲を求めよ.

$x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6>0$ が任意の実数 x で成り立つのは

2 次方程式 $x^2+2(a+2)x+2a^2+a-6=0$ が実数解をもたないとき.

よって，この式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(2a^2+a-6)=-a^2+3a+10<0$$

$(a+2)(a-5)>0$　　よって　$a<-2,\ 5<a$

2 ［2］ 不等式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

$kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$　……①

$k=0$ のとき　①は　$-3x-1\geqq 0$　　$x\leqq -\dfrac{1}{3}$　　よって　$-\dfrac{1}{3}<x$ では成り立たず不適

$k\neq 0$ のとき　①がすべての実数 x で成り立つのは

$k>0$　かつ　2 次方程式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1=0$ の判別式 D について $D\leqq 0$ のとき.

$D=(2k-3)^2-4k(2k-1)=-4k^2-8k+9\leqq 0$

$4k^2+8k-9\geqq 0$　　$k\leqq\dfrac{-2-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}\leqq k$

$k>0$ より　$\dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}\leqq k$　　　よって求める k の値の範囲は　$\boldsymbol{k\geqq\dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2次方程式 $x^2+2ax+4a+12=0$ ……①　について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1)　方程式①が重解をもつとき，a の値とその重解を求めよ．

(2)　方程式①が異なる2つの負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(3)　方程式①が負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2+2ax+4a+12=0$　が重解をもつのは，判別式を D とすると　$D=0$ のとき．

よって　$\dfrac{D}{4}=a^2-(4a+12)=a^2-4a-12=0$

$a^2-4a-12=0$　　$(a-6)(a+2)=0$　　したがって　$\boldsymbol{a=-2,\ 6}$

$\boldsymbol{a=-2}$ のとき　①式は

$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$

より　$\boldsymbol{x=2}$

$\boldsymbol{a=6}$ のとき　①式は

$x^2+12x+36=(x+6)^2=0$

より　$\boldsymbol{x=-6}$

(2)　$f(x)=x^2+2ax+4a+12$　とおくと

$f(x)=(x+a)^2-a^2+4a+12$　　軸：$x=-a$

①が異なる2つの負の解をもつのは，

$-a<0$　　つまり　$a>0$

$a^2-4a-12>0$　　つまり　$a<-2,\ 6<a$

$f(0)=4a+12>0$　　つまり　$a>-3$

これらをすべて満たす a の値の範囲は　$\boldsymbol{a>6}$

(3)　①が負の解をもつのは(i)，(ii)のいずれか

(i)　①が2つの負の解をもつ（重解含む）　　(ii)　①が1つの負の解をもつ

(i)のとき　(1)および(2)より　$a\geqq 6$

(ii)のとき

$f(0)=0$ となるのは　$a=-3$ のとき

このとき　①は $x^2-6x=0$　　$x(x-6)=0$　$x=0,\ 6$

よって負の解をもたず不適

$f(0)<0$ のとき　$a<-3$　　このとき①は正の解と負の解をもつ

以上より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-3,\ 6\leqq a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　２次関数(2)

(1)　a を正の整数とする．x の２次不等式 $x^2-6x-a^2-2a+8\leqq 0$ を満たす整数が 33 個あるとき，$a=$ **アイ** である．

(2)　すべての実数 x に対して $ax^2+(a+1)x+a<0$ が成り立つような定数 a の値の範囲は $a<-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

(3)　２次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$　……①が１より大きい異なる２つの実数解をもつような定数 k の値の範囲は **オ** $<k<$ **カ** である．また①が $x=1$ を解にもつとき，もう１解は $x=$ **キ** である．

解答例

(1)　$x^2-6x-a^2-2a+8\leqq 0$　……①　を変形して

$x^2-6x-(a+4)(a-2)\leqq 0$　　　$(x-a-4)(x+a-2)\leqq 0$

$a>0$ より　$-a+2<a+4$　　よって　①の解は　$-a+2\leqq x\leqq a+4$

これを満たす整数 x が 33 個より　$(a+4)-(-a+2)+1=33$　　したがって　$a=\mathbf{15}$

(2)　$ax^2+(a+1)x+a<0$　……①　について

$a=0$ のとき　①は $x<0$　　これはすべての実数 x では成り立たず不適．

$a\neq 0$ のとき　$f(x)=ax^2+(a+1)x+a$ とおき，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

①がすべての実数 x に対して成り立つのは　$a<0$　かつ　$D<0$　のとき．

$D=(a+1)^2-4\cdot a\cdot a=-3a^2+2a+1$　より　$-3a^2+2a+1<0$

$3a^2-2a-1>0$　　$(3a+1)(a-1)>0$　　$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$

$a<0$ を考慮し，求める a の値の範囲は　$a<-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

(3)　$f(x)=x^2-2kx+k+2$　とおくと，$f(x)$ の軸は　$x=k$

また，①の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(k+2)=k^2-k-2=(k+1)(k-2)$

$f(x)$ が x 軸の $x>1$ の部分と２つの共有点をもつのは

$f(1)>0$　かつ　$1<k$　かつ　$D>0$　のとき

よって　$k<3$　かつ　$k>1$　かつ　$k<-1$，$2<k$　　より　$\mathbf{2<k<3}$

①が $x=1$ を解にもつとき　$f(1)=0$　　よって　$k=3$

このとき①は　$x^2-6x+5=0$　より　①のもう１解は　$x=\mathbf{5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。